МЕТРИЧНИ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗОБРАЗЯВАНЕ НА ОСЕСИМЕТРИЧНИ ПОВЪРХНИНИ ВЪРХУ РАВНИНА

Виктор Бончев - БАН

Институт за ядрени изследвания и ядрена енергетика

Резюме. Изследват се радиални изображения на регулярни осесиметрични пояси върху плоски пръстени. При фиксиран вътрешен радиус, свободен външен радиус и двустранно ограничен площен множител се минимизира максималното абсолютно логаритмично разтягане. Задачата се свежда до скаларно диференциално уравнение и единствен корен. Получава се каноничен минимизатор от клас C1,1; единственост се установява при контакт на горното метрично ограничение в края на пояса. Аналитичното цилиндрично решение и числени примери за сфера, елипсоиди и профил със стеснение проверяват алгоритъма. Резултатите показват защо запазването на площите не гарантира малки линейни деформации и защо проверката само по границата може да бъде недостатъчна

Ключови думи: осесиметрична повърхнина; метрична деформация; равноплощност; минимаксна задача; индикатриса на Тисо.

1. Въведение и цел

Плоските представяния на повърхнини се използват в инженерната графика, картографията и визуализацията на геометрични модели. Изборът на координати сам по себе си не деформира повърхнината; изображението към равнина сравнява две различни метрики. Равноплощната карта запазва произведението на главните разтягания, а конформната — отношението им. Нито едно от тези свойства поотделно не гарантира запазване на дължините.

Целта е конструктивен контрол на най-голямата локална деформация при зададен площен допуск. Оптимизацията се извършва в изрично ограничен клас радиални карти, които запазват азимута. Не се предполага, че минимумът сред всички двумерни изображения непременно е осесиметричен.

2. Геометрична постановка и метрични множители

Нека $s \in [0, L]$ е дължина по проста регулярна профилна крива $(r(s), z(s))$, където $r, z \in C3$, $r > 0$ и $r'2 + z'2 = 1$. Повърхнината и нейната първа фундаментална форма са

$$X(s,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z), \quad g = \mathrm{d}s^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2, \quad (1)$$

където θ е периодичен с период 2π. От $|Xs| = 1$, $|X\theta| = r$ и $\langle Xs, X\theta \rangle = 0$ следват ортогоналността на координатните направления и елементът лице $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta$.

Гаусовата кривина е $K = -r''/r$.

При $r_0 = r(0)$ разглеждаме картата

$$F_\rho(s,\theta) = (\rho(s)\cos\theta, \rho(s)\sin\theta), \quad \rho(0) = r_0, \quad \rho' > 0. \quad (2)$$

Външният радиус $\rho(L)$ е свободен. Сравняването на g с индуцираната метрика

$\rho'^2\,\mathrm{d}s^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\theta^2$ дава главните линейни множители и площния множител:

$$\lambda_s = \rho', \quad \lambda_\theta = \frac{\rho}{r}, \quad J_A = \lambda_s\lambda_\theta = \frac{\rho\rho'}{r}. \quad (3)$$

Това е стандартният метричен подход към параметризациите (Floater и Hormann, 2005). Образът на единичната окръжност в ортонормираната допирателна равнина е елипса с полуоси $\lambda s, \lambda\theta$ — индикатриса на Тисо. При еднаква начална нормировка конформната и равноплощната карта са съответно

$$\rho_C = r_0\exp\left(\int_0^s \frac{\mathrm{d}v}{r(v)}\right), \quad \rho_A = \sqrt{r_0^2 + 2\int_0^s r\,(v)\,\mathrm{d}v}. \quad (4)$$

Изометрия в класа (2) изисква едновременно $\rho' = 1$ и $\rho = r$, следователно $r' = 1$ и $z' = 0$. Това ограничение е по-силно от $K = 0$: цилиндърът е развиваем след разрез, но неговата правоъгълна разгъвка не принадлежи на разглеждания пръстеновиден клас.

Картографският контекст е класически (Snyder, 1987). Екстремални изображения между пръстени при средна деформация са изследвани от Astala и др. (2010) и Kalaj (2010). Тук се използват различни функционал, площно ограничение и свободна външна граница; не се заявява библиографски приоритет на редукцията.

3. Минимаксна задача и точен критерий за допустимост

За площен допуск $\delta \geq 0$ полагаме $c = e^{-\delta}$. Допустими са липшицови функции $\rho \in W^{1,\infty}(0, L)$ с $\rho(0) = r_0$, $\rho > 0$ и $c \leq JA \leq c^{-1}$ почти навсякъде. Използва се непрекъснатият им представител. Минимизира се

$$D[\rho] = \operatorname*{ess\,sup}_{s\in(0,L)} \max\left\{|\log\rho'|, \left|\log\frac{\rho}{r}\right|\right\}, \quad D_* = \inf D[\rho]. \quad (5)$$

Логаритмите са на безразмерни множители и третират реципрочните разтягане и свиване симетрично. За $T \geq 1$ условието $D[\rho] \leq \log T$ означава $T^{-1} \leq \lambda s,\ \lambda\theta \leq T$.

Теорема 1. Нека $u_{T,c}$ решава началната задача

$$u' = f_{T,c}(s,u) := \max\left\{T^{-1}, \frac{cr(s)}{u}\right\}, \quad u(0) = r_0. \quad (6)$$

Съществува допустима карта с $D[\rho] \leq \log T$ точно когато

$$u_{T,c}(s) \leq Tr(s) \quad \text{за всяко } s \in [0, L]. \quad (7)$$

При това самото $u_{T,c}$ е допустимо и $c \leq JA[u_{T,c}] \leq 1$. *Доказателство.* За $u \geq r_0$ дясната страна е липшицова по u и ограничена. От $u' \geq T^{-1}$ следва глобално съществуване. Сравнението с горното решение $r_0 + s$, за което $r \leq r_0 + s$, дава

$$r_0 + \frac{s}{T} \leq u_{T,c}(s) \leq r_0 + s, \quad u_{T,c} \geq \frac{r}{T}. \quad (8)$$

Всяка допустима ρ с $D[\rho] \leq \log T$ удовлетворява $\rho' \geq f_{T,c}(s, \rho)$ и $\rho \leq Tr$. Скаларното сравнение дава $u_{T,c} \leq \rho$, което доказва необходимостта. Обратно, от (7) и (8) следва $T^{-1} \leq u/r \leq T$ и $T^{-1} \leq u' \leq \max(T^{-1}, cT) \leq T$. По площния клон $u' = cr/u$ е $JA = c$; по линейния клон $u' = T^{-1}$ е $JA = u/(Tr) \leq 1$. Долната площна граница важи и в двата случая. Следователно u е допустимо. □

4. Оптимално решение и аналитичен контрол

Равноплощната карта е допустима за всеки δ. Понеже $(\rho^2 A - r^2)' = 2r(1 - r') \geq 0$, имаме $\rho A \geq r$. Нека $TA = \max_{[0,L]} \rho A/r$. Определяме

$$h_c(T) = \max_{s\in[0,L]} \frac{u_{T,c}(s)}{r(s)} - T. \quad (9)$$

Теорема 2. Функцията *hc* има единствен корен $T^* \in [1,\ TA]$. Каноничният минимизатор е $\rho^* = uT^*,c$, като $D^* = \log T^*$, $\rho^* \in C1,1$ и $c \le JA[\rho^*] \le 1$. *Доказателство.* Ако $T2 > T1$, сравнението в (6) дава $uT2,c \le uT1,c$, следователно

$$h_c(T_2) \le h_c(T_1) - (T_2 - T_1). \quad (10)$$

Непрекъснатата зависимост на началната задача от *T* осигурява непрекъснатост на *hc*. Освен това $hc(1) \ge 0$, а допустимостта на ρA дава $hc(TA) \le 0$. Теорема 1 установява оптималността на корена. Всеки друг минимизатор е поне ρ^* по точков ред. Накрая cr/ρ^* е липшицова, затова и $\rho'^* = \max(T^* - 1,\ cr/\rho^*)$ е липшицова.

При краен контакт $\rho^*(L) = T^*r(L)$ минимизаторът е единствен: за друг минимизатор $w = \rho - \rho^* \ge 0$, $w(L) = 0$ и $w' \ge -Mw$, където $M = c \max r/r_0^2$. Следователно $(eMsw)' \ge 0$ и $w = 0$. Достатъчно условие за краен контакт е $r(L) = \min r$, защото uT,c нараства.

Без площно ограничение долната граница се достига от ρfree = r0 + s/Tfree, където

$$T_{\text{free}} = \max_{[0,L]} \frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 + 4r(s)s}}{2r(s)}, \quad \log T_{\text{free}} \le D_* \le \log T_A. \quad (11)$$

За цилиндър $r = R$, $x = L/R$, $T_{\text{free}} = (1 + \sqrt{1 + 4x})/2$ и

$$T_*(\delta) = \begin{cases} \sqrt{(1 + 2cx)/\big(c(2 - c)\big)}, & 0 \le \delta \le \log T_{\text{free}}, \\ T_{\text{free}}, & \delta \ge \log T_{\text{free}}. \end{cases} \quad (12)$$

Формулата следва чрез интегриране на двата клона на (6) и крайното условие $u(L) = TR$; тя служи за независим числен контрол.

5. Числена реализация и резултати

Изследвани са елипсоидни пояси $r(t) = a \sin t$, $z(t) = b \cos t$, $t \in [\pi/6,\ 5\pi/6]$, при $a = 1$ и $b/a \in \{0.7,\ 1,\ 1.4\}$. Тук $\mathrm{d}s = q(t)\,\mathrm{d}t$, $q = \sqrt{a2 \cos2\ t + b2 \sin2\ t}$, така че (6) се интегрира като $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = qfT,c(t,\ u)$. Понеже $r(L) = \min r = r0$, коренът се намира от $u(L) = Tr0$

Използвани са Python и SciPy (Virtanen и др., 2020), метод DOP853, относителен толеранс $10-11$, абсолютен толеранс $10-13$ и максимална стъпка $(t1 - t0)/128$. Бисекцията по *T* има абсолютен толеранс $2 \cdot 10-11$. За общ профил максимумът се сканира по 257 възела и се уточнява локално. Тази процедура е числена проверка, а не удостоверена глобална оптимизация за произволен профил.

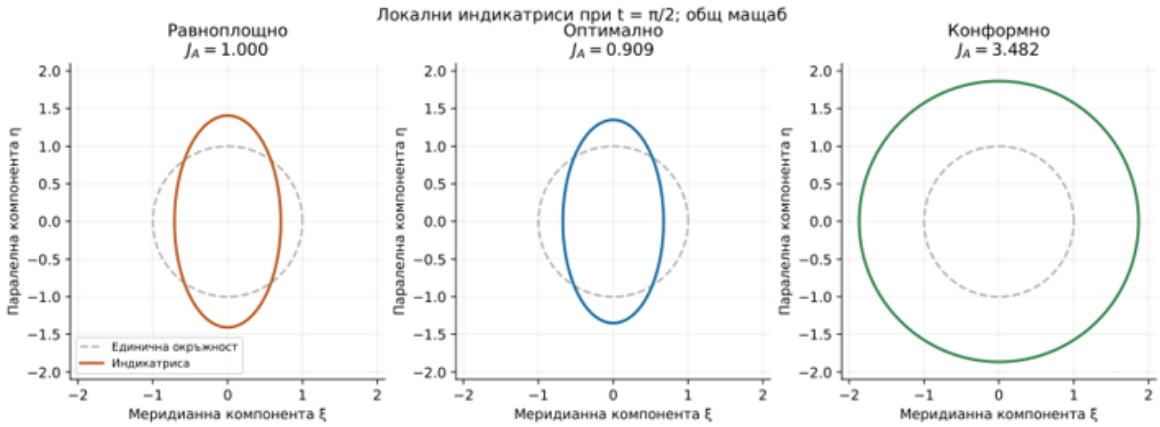
При $f = 1.10$ допустимият площен множител е между $1/1.10 \approx 0.90909$ и 1.10. Намалението на критерия е около 3–3.5%, но линейната деформация остава значителна: площният контрол ограничава произведението, а не всеки мащаб поотделно.

Таблица 1: Основни резултати при $f = e^{\delta}$. Намалението е спрямо $D^*(0)$; A^*/A е отношението на общите площи.

b/a	f	T^*	D^*	A^*/A	Намаление, %
0.7	1.00	3.441500	1.235907	1.000000	0.000
0.7	1.10	3.296513	1.192865	0.909910	3.483
1.0	1.00	3.854401	1.349216	1.000000	0.000
1.0	1.10	3.688689	1.305271	0.909791	3.257
1.4	1.00	4.374390	1.475767	1.000000	0.000
1.4	1.10	4.183015	1.431032	0.909697	3.031

В пълната числена серия са преминали 32 автоматични проверки. При 15 цилиндрични случая максималната абсолютна разлика в T^* спрямо (12) е $4.22 \cdot 10{-}11$. Независимо диференциране на декартовите компоненти дава разлики $1.27 \cdot 10{-}10$ за сингулярните числа и $2.05 \cdot 10{-}10$ за площния множител. Това са наблюдавани грешки в изпълнените тестове, а не строги оценки за всички входни геометрии.

6. Геометрична интерпретация и приложимост



Фигура 1: Индикатриси на Тисо за сферичния пояс при $t = \pi/2$ и общ мащаб. За оптималната карта $e^{\delta} = 1.10$; пунктирът е единичната окръжност.

Равноплощната индикатриса има лице π, но различни полуоси; конформната е окръжност, чийто радиус не е единица. Следователно визуално правилната форма не означава правилен мащаб. Меридианите и паралелите остават ортогонални при всички карти (2), поради което правоъгълността на координатната мрежа също не доказва конформност.

Необходимостта от проверка по целия меридиан се вижда при

$$r(s) = 1 - 0.4\exp\left[-\left(\frac{s-0.9}{0.35}\right)^2\right], \quad 0 \le s \le 1.5. \quad (13)$$

Тук $r \ge 0.6$ и $|r'| < 1$, затова $z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - r'(v)^2}\,\mathrm{d}v$ определя регулярен профил. При $e^{\delta} = 1.10$ правилният резултат е $T_* = 2.598435$, с контакт при $s \approx 0.922775$. Проверка само в края дава $T = 1.934211$, но реалният максимум на λ_θ за тази карта е 2.651338 — около 37.08% над заявената граница. Причината е неправилно ограничаване на областта на проверката.

За инженерната графика следва практически ред: задаване на профила и началната нормировка; избор на площен допуск; намиране на T_*; проверка на локалните мащаби и визуализация при общ мащаб на осите. Критерият оценява геометрична точност. Той не предсказва механична якост или технологична пригодност без допълнителен физически модел.

7. Изводи

Главните множители ρ' и ρ/r дават пряк и еднозначен контрол на линейните и площните деформации. Равноплощност, конформност и изометричност са различни изисквания и не трябва да се заключават само от вида на плоската мрежа.

При фиксиран вътрешен радиус и свободен външен радиус минимаксната задача се свежда до начална задача и единствен скаларен корен. Каноничният минимизатор е $C1{,}1$ и не разширява локално площите. При краен контакт е доказана и единственост на картата; тя не следва само от единствеността на оптималната стойност.

Числените резултати подкрепят аналитичната конструкция и показват умерено подобрение при малък площен допуск. Примерът със стеснение установява значението на глобалната проверка. Изводите се отнасят до регулярни пояси без полюси и до

избрания радиален клас; данните са синтетични, а претенция за общ двумерен оптимум не се прави.

Литература / References

- ASTALA, K., IWANIEC, T., MARTIN, G., 2010. Deformations of Annuli with Smallest Mean Distortion. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 195, 899–921. DOI: 10.1007/s00205-009-0231-z.
- FLOATER, M. S., HORMANN, K., 2005. Surface Parameterization: a Tutorial and Survey. In: *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*. Springer, 157–186. DOI: 10.1007/3-540- 26808-1_9.
- KALAJ, D., 2010. *Deformations of Annuli on Riemann surfaces with Smallest Mean Distortion*. arXiv:1005.5269, version 3. DOI: 10.48550/arXiv.1005.5269.
- SNYDER, J. P., 1987. *Map Projections: A Working Manual*. U.S. Geological Survey, Professional

  Paper 1395. DOI: 10.3133/pp1395.

- VIRTANEN, P., GOMMERS, R., OLIPHANT, T. E., et al., 2020. SciPy 1.0: Fundamental Algo-

  rithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 17, 261–272. DOI: 10.1038/s41592-

  019-0686-2.

METRIC DISTORTION IN PLANAR MAPPINGS OF AXISYMMETRIC SURFACES

Abstract. Radial mappings of regular axisymmetric belts onto planar annuli are studied. With a fixed inner radius, a free outer radius and a two-sided local area constraint, the maximum absolute logarithmic stretch is minimized. The problem reduces to a scalar initial-value problem and a unique root. A canonical $C1,1$ minimizer is obtained; uniqueness holds when the upper metric bound is attained at the outer boundary. An exact cylindrical solution and numerical examples involving a sphere, ellipsoids and a necked profile validate the algorithm. The results show why area preservation does not guarantee small linear distortion and why boundary-only checks may be insufficient.

Keywords: surface of revolution; metric distortion; area preservation; minimax problem; Tissot indicatrix.

Viktor Bonchev
BAS, INRNE
Bulgaria
E-mail: vabonchev@gmail.com